שיעור 12 0 שילוש ולכסון אופרטורים אורתונורמליים ואוניטרים

# משפט השילוש האוניטרי\אורתונורמלי

1. V ממ"פ(מרחב מכפלה פנימית) מעל , ו אופרטור אזי קיים בסיס B אורתונורמלי כך ש משולשית(עליונה)
2. אם אזי קיימת אוניטרית, כך ש משולשית.

# אלגוריתם למציאת השילוש האורתונורמלי

1. בהינתן בסיס E של V כך ש משולשית עליונה, נבצע גרם-שמידט על E לקבלת בסיס אורתונורמלי B, ואז   
   גם ו משולשיות: ,...  
   - גם משולשית עליונה.  
   מקבלים ש שווה למכפלת שלוש מטריצות משולשית עליונה.  
   לסיכום:
   * משלשים עם בסיס כלשהו E
   * מבצעים גרם-שמידט על E
2. רוצים לשלש מטריצה   
   בהינתן מטריצה כך ש משולשית עליונה, נבצע גרם-שמידט על עמודות R לקבלת P.  
    משולשית עליונה.

## הערה

1. משפט השילוש האוניטרי נכון גם עבור אופרטור\מטריצה מעל בתנאי שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים.
2. גם ההפך נכון – כלומר אם הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, אז האופרטור\המטריצה ניתן לשילוש אוניטרי.

# תרגיל

תהי A מטריצה משולשית נורמלית. הוכח כי A אלכסונית.  
תזכורת: ⬄ A נורמלית.

## פתרון

*נביט באיבר ה11 של :   
נביט באיבר ה11 של :   
⇦ ⇦   
באופן דומה אפשר להשוות את האיבר השני באלכסון וכן הלאה, ולהגיע למסקנה שמטריצה חייבת להיות אלכסונית.*

# תרגיל(משפט הלכסון האוניטרי)

יהי V ממ"פ מעל ויהי אופרטור. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

1. יש בסיס אורתונורמלי כך ש אלכסונית
2. T נורמלי

## פתרון

(א⇦ב) אלכסונית ⇦ נורמלית כי B אורתונורמלי ⇦ T נורמלי.

(ב⇦א) נתון T נורמלי. לפי משפט השילוש האורתונורמלי קיים בסיס B אורתונורמלי כך ש משולשית.  
T נורמלי ⇦ נורמלית. ⇦(לפי תרגיל קודם)⇦ *אלכסונית.*

## הערה

1. T אוניטרי\נורמלי\הרמיטי\אנטי-... וB אורתונורמלי ⇦ אוניטרית\...
2. אם עבור B אורתונורמלי אוניטרית\... ⇦ T אוניטרי\...

# תרגיל

V מרחב מכפלה פנימית מעל , אופרטור, . הוכח שT צמוד לעצמו.

## פתרון(לחלק משמאל בT לא עובד)

לפי שילוש אורתונורמלי קיים B אורתונורמלי כך ש משולשית עליונה.  
נביט באיבר הkk של :   
נביט באיבר הkk של :  *עכשיו ⇦ לכן הוא ממשי ואי-שלילי ולכן   
מכאן, ש היא: ⇦ צמודה לעצמה ⇦ T צמוד לעצמו "הרמיטי"*

# מקבילה למשפט הלכסון האוניטרי למטריצות

*נורמלית אם ורק אם היא ניתנת ללכסון ע"י מטריצה אוניטרית.*

# משפט

אם A נורמלית וv וw הם וקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים שונים אזי ⬄

# תרגיל

וP הפיכה. . הוכח כי  
v ווקטור עצמי של B המתאים ל ⬄ ווקטור עצמי של A המתאים ל

## פתרון

# תרגיל

( שונים)  
הוכח כי אם v וw ו"ע של D השייכים לע"ע שונים אזי

## פתרון

בה"כ נגיד שv מתאים ל וw מתאים ל.

# הוכחת המשפט

A נורמלית ולכן היא לכסינה ע"י מטריצה אוניטרית P. אלכסונית. w,v ו"ע המתאימים ל ⇦ ו"ע של D המתאימים ל ו. נסמן   
לפי התרגיל השני . כעת P אוניטרית ולכן שומרת זווית, לכן ⇦